

Néhány nevezetlen mértani helyről

Előző dolgozatunkban – melynek címe: *Négy nevezetes mértani helyről ~ másképpen* – azokról a mértani helyekről volt szó, melyek leírása így néz ki:

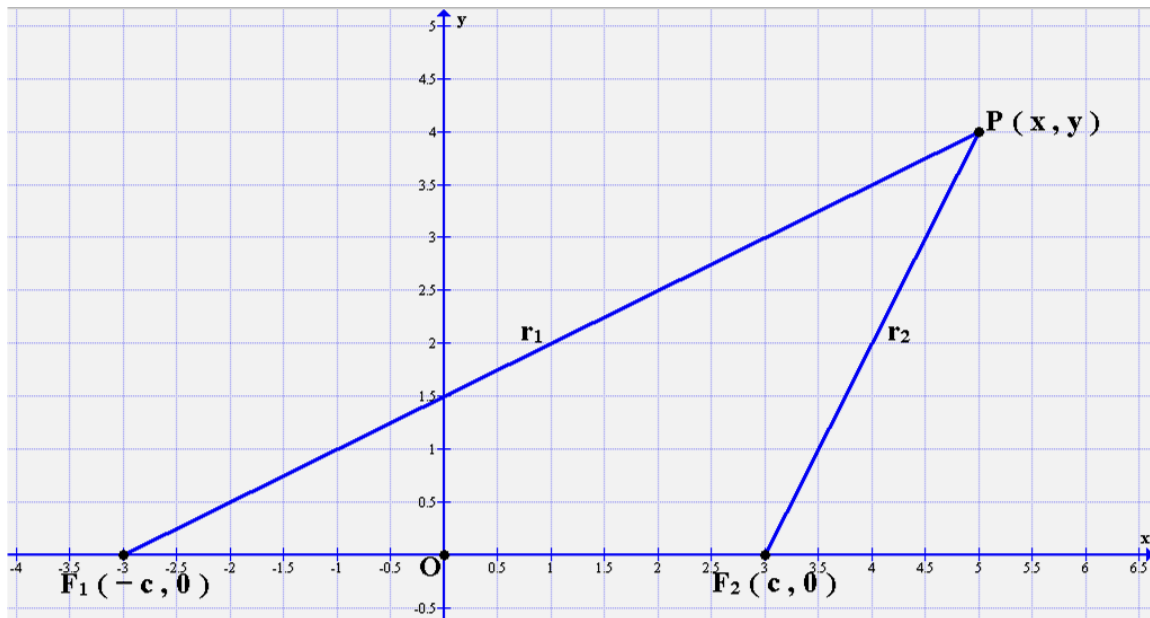
$$\sim r_1 + r_2 = 2 \cdot a = konst, \quad (a)$$

$$\sim r_1 - r_2 = \pm 2 \cdot a = konst, \quad (b)$$

$$\sim r_1 \cdot r_2 = a^2 = konst. , \quad (c)$$

$$\sim \frac{r_1}{r_2} = k = konst. \quad (d)$$

Itt az alapértelmezést az 1. ábra jeleníti meg.



1. ábra

Fentiekben:

$$r_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}, \quad r_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}, \quad c > 0. \quad (1)$$

Tapasztalataink alapján az (a) ellipszis és a (b) hiperbola viszonylag ismertebb, a (c) ovális és a (d) kör már nem annyira. Látjuk, hogy fentiek úgy álltak elő, hogy az F_1 és F_2 rögzített pontoktól a görbe P pontjáiig mért r_1 és r_2 távolságok egyszerű műveletekkel – a számtani alpműveletekkel – lettek összekapcsolva. Szinte magától adódik a kérdés:

Mi a helyzet más algebrai és nem algebrai – transzcendens – műveletek esetén?

Most erről lesz szó. Kutakodásunk alapját az előálló implicit függvények ábrázolására is alkalmas **Graph** szoftver képezi. Mi ehhez szoktunk hozzá, ezzel dolgozunk szívesen.

I. Hatványozás

A fentiek analógiájára ekkor az alábbi alakok fordulnak elő:

$$\sim r_1^p + r_2^q = 2 \cdot a^m = konst ; p = konst. , q = konst. , m = konst. \quad (I. 1)$$

$$\sim r_1^p - r_2^q = \pm 2 \cdot a^m = konst ; p = konst. , q = konst. , m = konst. \quad (I. 2)$$

$$\sim r_1^p \cdot r_2^q = a^{p+q} = konst. ; p = konst. , q = konst. \quad (I. 3)$$

$$\sim \frac{r_1^p}{r_2^q} = k^m = konst , p = konst. , q = konst. , m = konst. \quad (I. 4)$$

Ránézésre is látszik, hogy ez óriási változatosságot jelent, hiszen a **p** és **q** állandók lehetnek pozitív / negatív, egész / tört számok, melyek igencsak eltérő függvényeket generálhatnak. Ezért aztán csak kiemelt példákra szorítkozhatunk.

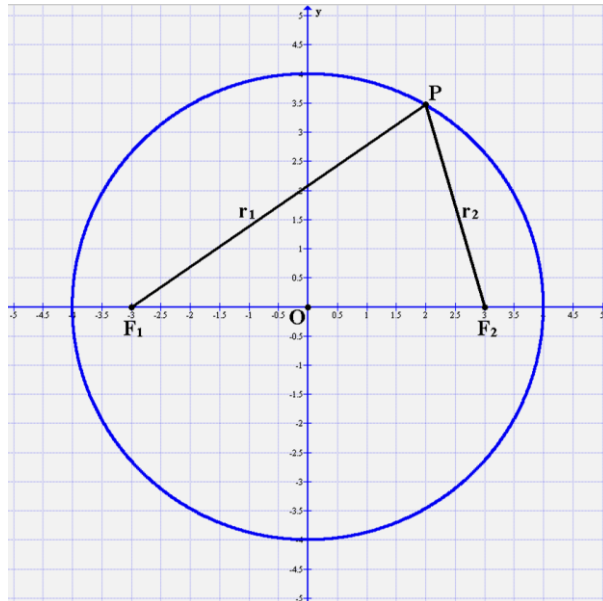
$$\boxed{r_1^2 + r_2^2 = 2 \cdot a^2} , \text{ azaz } \mathbf{p = q = m = 2.} \quad (I. 1 / 1)$$

Most (1) és (I. 1 / 1)- gyel:

$$\begin{aligned} & \left(\sqrt{(x+c)^2 + y^2} \right)^2 + \left(\sqrt{(x-c)^2 + y^2} \right)^2 = 2 \cdot a^2 , \text{ azaz:} \\ & (x+c)^2 + y^2 + (x-c)^2 + y^2 = 2 \cdot a^2 \rightarrow (x+c)^2 + (x-c)^2 + 2 \cdot y^2 = 2 \cdot a^2 , \\ & x^2 + 2 \cdot c \cdot x + c^2 + x^2 - 2 \cdot c \cdot x + c^2 + 2 \cdot y^2 = 2 \cdot a^2 , \\ & 2 \cdot x^2 + 2 \cdot c^2 + 2 \cdot y^2 = 2 \cdot a^2 \rightarrow x^2 + y^2 = a^2 - c^2 \equiv R^2 \geq 0 , \text{ tehát:} \\ & \underline{x^2 + y^2 = a^2 - c^2 \equiv R^2 \geq 0 ,} \end{aligned} \quad (2)$$

ami egy **(0, 0)** középpontú, **R** sugarú kör egyenlete , ha **a > c** .

Adatok az ábrázoláshoz – 2. ábra – : **a = 5 , c = 3 → R = 4** . (A1)



2. ábra

$$\boxed{r_1^2 - r_2^2 = \pm 2 \cdot a^2}, \text{ azaz } \mathbf{p = q = m = 2}.$$

(I. 2 / 1)

Most (I. 2 / 1) és (1) - gyel:

$$\left(\sqrt{(x+c)^2 + y^2} \right)^2 - \left(\sqrt{(x-c)^2 + y^2} \right)^2 = \pm 2 \cdot a^2, \text{ azaz:}$$

$$(x+c)^2 + y^2 - [(x-c)^2 + y^2] = \pm 2 \cdot a^2 ;$$

$$(x+c)^2 + y^2 - [(x-c)^2 + y^2] = \pm 2 \cdot a^2 ,$$

$$(x+c)^2 + y^2 - (x-c)^2 - y^2 = \pm 2 \cdot a^2 \rightarrow (x+c)^2 - (x-c)^2 = \pm 2 \cdot a^2 \rightarrow$$

$$x^2 + 2 \cdot c \cdot x + c^2 - (x^2 - 2 \cdot c \cdot x + c^2) = \pm 2 \cdot a^2 \rightarrow 4 \cdot c \cdot x = \pm 2 \cdot a^2 \rightarrow x = \pm \frac{a^2}{2 \cdot c},$$

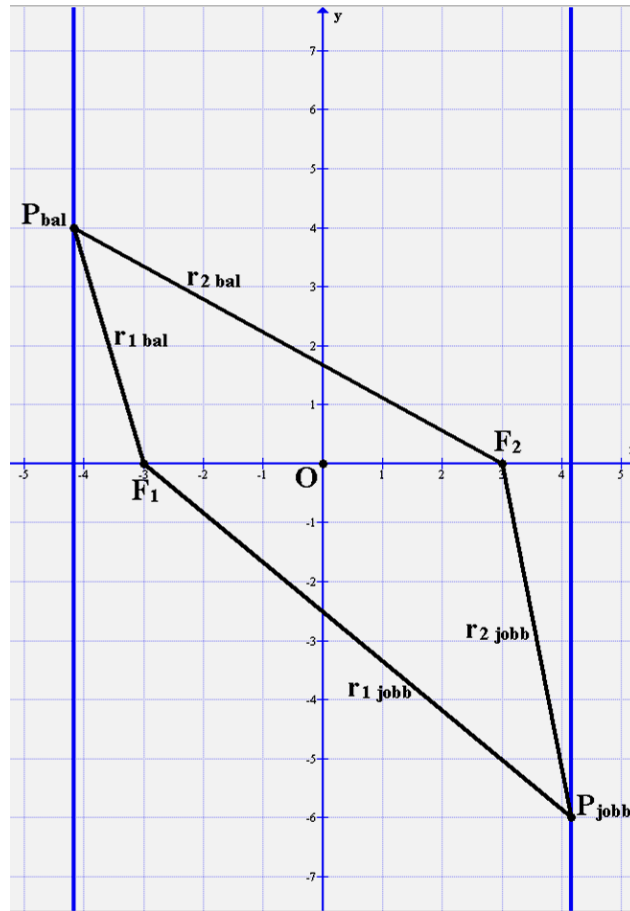
tehát:

$$\underline{x = \pm \frac{a^2}{2 \cdot c}}, \text{ vagy } x^2 = \left(\frac{a^2}{2 \cdot c} \right)^2.$$

(3)

A (3) egyenlet egy y tengellyel párhuzamos *egyenespár* egyenlete.

Most (3) és (A1) - gyel megrajzoljuk grafikonját – 3. ábra.



3. ábra

A jobb oldali egyenesre: $r_1^2 - r_2^2 = +2 \cdot a^2$, a bal oldali egyenesre: $r_1^2 - r_2^2 = -2 \cdot a^2$.

$$\boxed{r_1^2 \cdot r_2^2 = a^4}, \text{ azaz } \mathbf{p = q = 2} \quad (\text{I. 3 / 1})$$

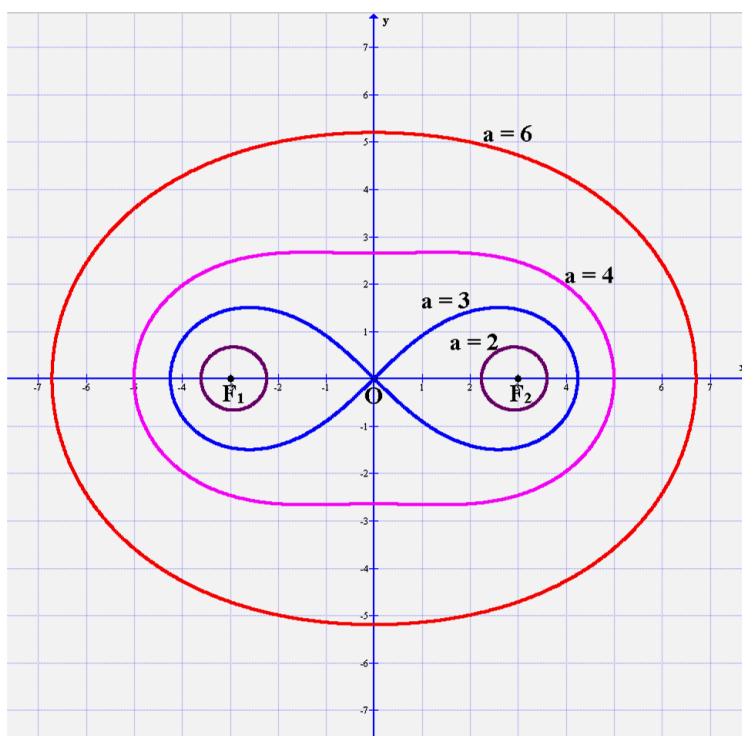
Most (I. 2 / 1) és (1) - gyel:

$$\left(\sqrt{(x+c)^2 + y^2}\right)^2 \cdot \left(\sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right)^2 = a^4, \text{ azaz:} \\ [(x+c)^2 + y^2] \cdot [(x-c)^2 + y^2] = a^4. \quad (4)$$

Adatok az ábrázoláshoz:

$$c = 3; a = 6; 4; 3; 2. \quad (\text{A2})$$

Most (4) és (A2) szerint megrajzoljuk a függvények grafikonjait – 4. ábra.



4. ábra

Ezek ugyanolyanok, mint az előző dolgozatbeli megfelelőik. Valóban: egyenletük a *Cassini - oválisok* $r_1 \cdot r_2 = a^2$ egyenletének négyzetre emelésével állt elő.

$$\boxed{\frac{r_1^2}{r_2^2} = k^2}, \text{ azaz } \mathbf{p = q = m = 2} \quad (\text{I. 4 / 1})$$

Most (I. 4 / 1) és (1) - gyel:

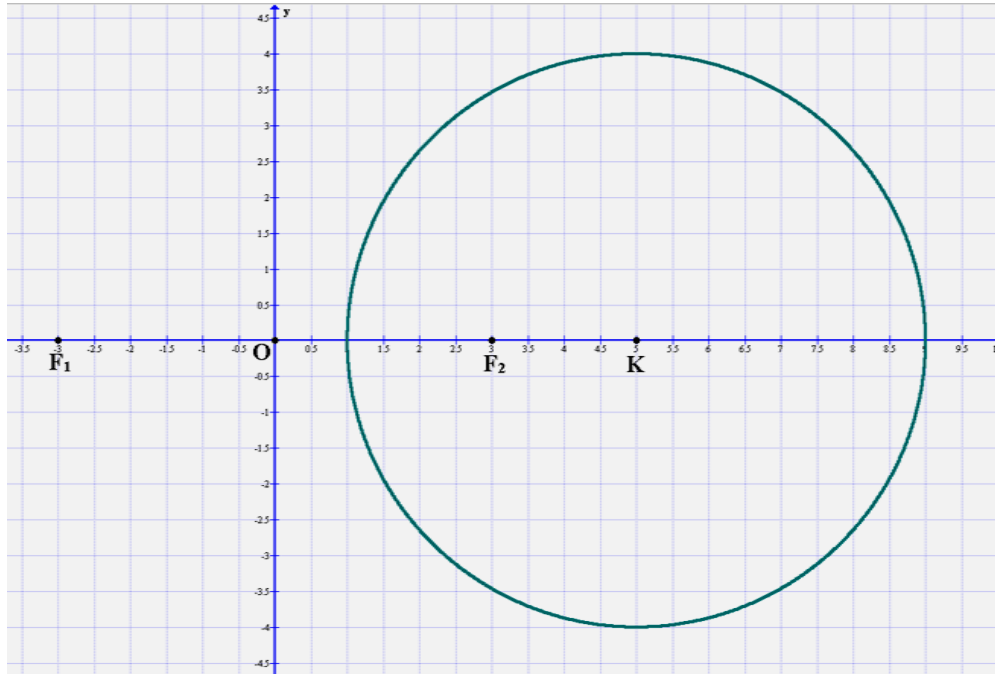
$$\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 = k^2 \rightarrow \frac{(x+c)^2 + y^2}{(x-c)^2 + y^2} = k^2; \quad (5)$$

Adatok az ábrázoláshoz:

$$c = 3 \text{ (h.e.)}, k = 2.$$

(A3)

Az (5) és (A3) szerinti függvény grafikonját az 5. ábra mutatja.



5. ábra

Ez ugyanolyan, mint, előző dolgozatbeli megfelelője. Valóban: egyenlete az *Apollóniusz - féle kör* $\frac{r_1}{r_2} = k$ egyenletének négyzetre emelésével állt elő.

Míg az előző dolgozatban r_i ($i = 1, 2$) kitevője **+1** volt, itt mindegyiké **+2**, vagyis páros.

.....

Most tekintsük az alábbi eset - családot!

$$\sim \left(\frac{r_1}{a}\right)^p + \left(\frac{r_2}{b}\right)^q = \delta; \left(\frac{r_1}{a}\right)^q + \left(\frac{r_2}{b}\right)^p = \delta; \quad (\text{I. 5})$$

$$\sim \left(\frac{r_1}{a}\right)^p - \left(\frac{r_2}{b}\right)^q = \pm\delta; \left(\frac{r_1}{a}\right)^q - \left(\frac{r_2}{b}\right)^p = \pm\delta; \quad (\text{I. 6})$$

$$\sim \left(\frac{r_1}{a}\right)^p \cdot \left(\frac{r_2}{b}\right)^q = \delta; \left(\frac{r_1}{a}\right)^q \cdot \left(\frac{r_2}{b}\right)^p = \delta; \quad (\text{I. 7})$$

$$\sim \frac{\left(\frac{r_1}{a}\right)^p}{\left(\frac{r_2}{b}\right)^q} = \delta; \frac{\left(\frac{r_1}{a}\right)^q}{\left(\frac{r_2}{b}\right)^p} = \delta. \quad (\text{I. 8})$$

Itt a dimenziókat egyeztetettük, azaz dimenzió nélküli számokkal dolgozunk, ahol

~ **a** és **b**: szakaszhozzsók, vagyis nagyságukat egy pozitív szám jellemzi;

~ **δ**, **p** és **q**: dimenziótlán számok.

A eset: $p = 1, q = 1$.

Ekkor (I. 5) ~ (I. 8) így fest:

$$\boxed{\frac{r_1}{a} + \frac{r_2}{b} = \delta > 0, a > 0, b > 0;}$$
 (I. 5 – 1)

$$\boxed{\frac{r_1}{a} - \frac{r_2}{b} = \pm \delta}, \text{ vagy } \left| \frac{r_1}{a} - \frac{r_2}{b} \right| = \delta \geq 0, a > 0, b > 0;$$
 (I. 6 – 1)

$$\frac{r_1}{a} \cdot \frac{r_2}{b} = \delta > 0 \rightarrow r_1 \cdot r_2 = a \cdot b \cdot \delta = konst. > 0, a > 0, b > 0;$$
 (I. 7 – 1)

$$\frac{\frac{r_1}{a}}{\frac{r_2}{b}} = \delta > 0 \rightarrow \frac{r_1}{r_2} \cdot \frac{b}{a} = \delta > 0 \rightarrow \frac{r_1}{r_2} = \frac{a}{b} \cdot \delta = konst. > 0, a > 0, b > 0.$$
 (I. 8 – 1)

Látjuk, hogy a két utolsó családtag nem hoz újat az előzőkhöz képest, így elegendő az első kettővel foglalkoznunk.

.....

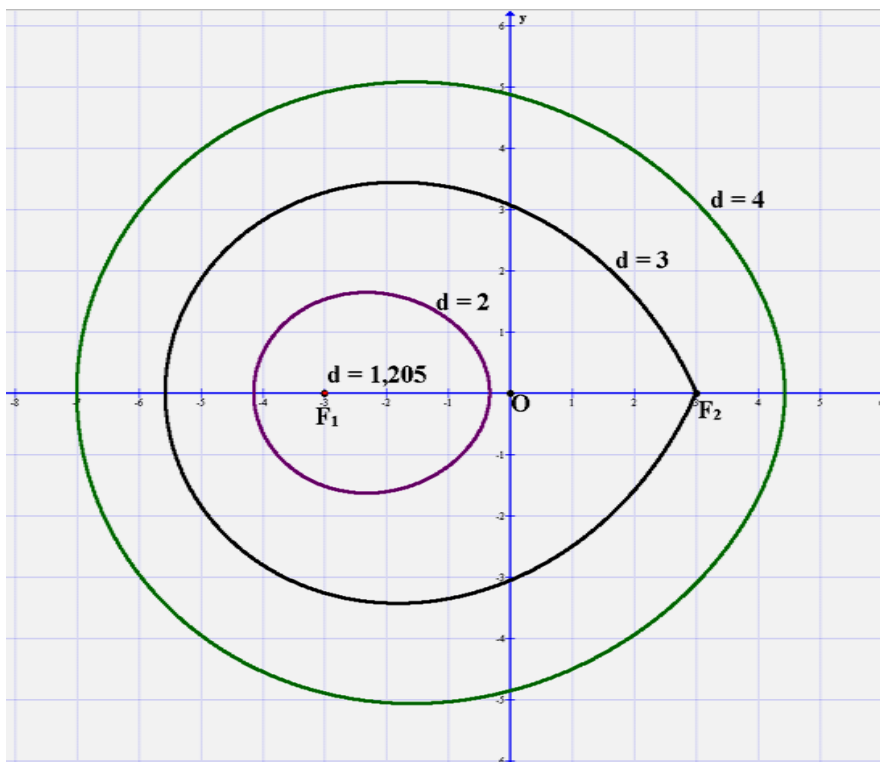
Most (I. 5 – 1) és (1) szerint:

$$\frac{1}{a} \cdot \sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \frac{1}{b} \cdot \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \delta;$$
 (6)

Adatok az ábrázoláshoz:

$$a = 2 \text{ (h.e.)}; b = 5 \text{ (h.e.)}; c = 3 \text{ (h.e.)}; \delta = 1,205; 2; 3; 4.$$
 (A4)

A (6) és (A4) szerinti függvények grafikonjait a 6. ábrán láthatjuk.



6. ábra

E görbék *tojásszerűek*. Többalakúságuk (I. 5 – 1) alapján értelmezhető:

$$\begin{aligned} \text{a) } \frac{r_1}{a} + \frac{r_2}{b} = \delta &\rightarrow r_1 = 2 \cdot c \rightarrow r_2 = 0 \rightarrow \frac{2 \cdot c}{a} + \frac{0}{b} = \delta_{1,0} \rightarrow \delta_{1,0} = \frac{2 \cdot c}{a} = \frac{2 \cdot 3(\text{h.e.})}{2(\text{h.e.})} = 3; \\ \text{b) } \frac{r_1}{a} + \frac{r_2}{b} = \delta &\rightarrow r_1 = 0 \rightarrow r_2 = 2 \cdot c \rightarrow \frac{0}{a} + \frac{2 \cdot c}{b} = \delta_{2,0} \rightarrow \delta_{2,0} = \frac{2 \cdot c}{b} = \frac{2 \cdot 3(\text{h.e.})}{5(\text{h.e.})} = 1,2. \end{aligned}$$

Az a) és b) szerinti eredmények megfelelnek a 6. ábra képének.

Az $a = b$ speciális esetben (I. 5 – 1) -ből:

$$\frac{r_1}{a} + \frac{r_2}{b} = \delta \rightarrow a = b \rightarrow \frac{r_1}{a} + \frac{r_2}{a} = \delta \rightarrow r_1 + r_2 = \delta \cdot a = 2 \cdot a^*,$$

vagyis a (6) függvény tojásszerű görbéje *ellipszisbe megy át*.

A 6. ábrán a $\delta = 1,205$ értéknél még kitett egy - két pontot a rajzoló program, azonban $\delta = 1,2$ -nél már nem. A tapasztalatok alapján kimondható a

$$\delta > \min(\delta_{1,0} = \frac{2 \cdot c}{a}, \delta_{2,0} = \frac{2 \cdot c}{b}) \quad (6 / 1)$$

ábrázolhatósági feltétel.

.....

Majd (I. 6 – 1) és (1) szerint:

$$\left| \frac{1}{a} \cdot \sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \frac{1}{b} \cdot \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \right| = \delta \geq 0. \quad (7)$$

Mielőtt nekilátnánk az ábrázolásnak, megnézzünk néhány speciális esetet.

S1.: $\delta = 0$.

$$\text{Ekkor (I. 6 – 1) -ből: } \left| \frac{r_1}{a} - \frac{r_2}{b} \right| = \delta = 0 \rightarrow \frac{r_1}{a} - \frac{r_2}{b} = 0 \rightarrow \frac{r_1}{a} = \frac{r_2}{b} \rightarrow$$

$$\underline{\frac{r_1}{r_2} = \frac{a}{b} = k}; \quad (S1 - 1)$$

ez az *Apollóniusz -féle kör* esete; az előző dolgozatban felírt képletekkel:

$$\sim \text{a kör középpontjának koordinátái: } x_0 = c \cdot \frac{k^2+1}{k^2-1}, \quad k \neq 1; \quad y_0 = 0, \quad (S1 - 2)$$

$$\sim \text{a kör sugara: } R = \left| \frac{2 \cdot c \cdot k}{k^2-1} \right|, \quad k \neq 1. \quad (S1 - 3)$$

Adatok az ábrázoláshoz:

$$a = 2 (\text{h.e.}); \quad b = 5 (\text{h.e.}); \quad c = 3 (\text{h.e.}); \quad \delta = 0 \approx \frac{1}{2000}. \quad (A5)$$

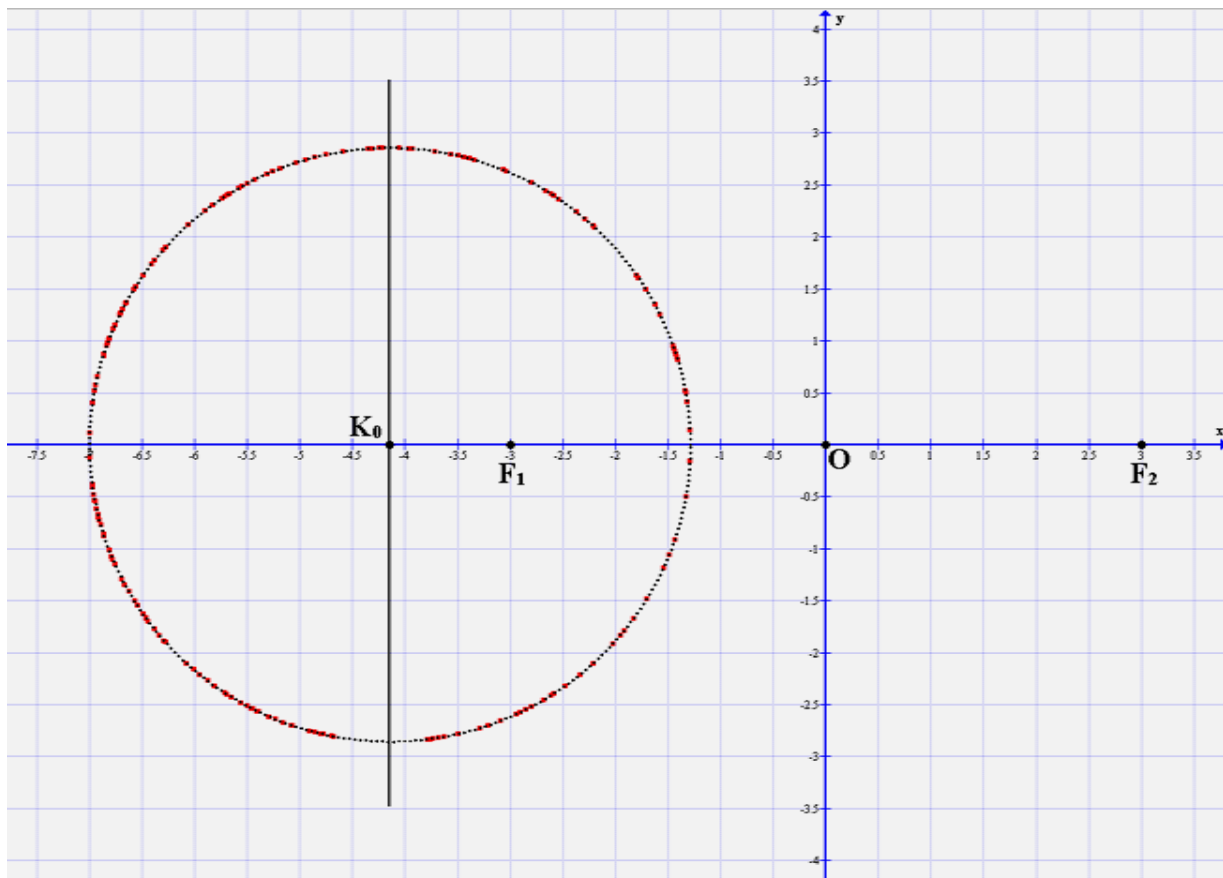
Most (S1 – 1, 2, 3) és (A5) - tel:

$$k = \frac{a}{b} = \frac{2}{5} = 0,4; \quad (e1)$$

$$x_0 = c \cdot \frac{k^2+1}{k^2-1} = 3 \text{ (h.e.)} \cdot \frac{0,4^2+1}{0,4^2-1} = -4,143 \text{ (h.e.)}; y_0 = 0 \text{ (h.e.)}; \quad (\text{e2})$$

$$R = \left| \frac{2 \cdot c \cdot k}{k^2-1} \right| = \left| \frac{2 \cdot 3 \text{ (h.e.)} \cdot 0,4}{0,4^2-1} \right| = 2,857 \text{ (h.e.)}. \quad (\text{e3})$$

A 7. ábrán megrajzoltuk a $\delta = 0$ - nak megfelelő, (e2), (e3) szerinti kört, valamint a (7) szerinti görbét; a pontos kört fekete pontvonallal, a $\delta = 1/2000 \approx 0$ - nak megfelelő görbét pirossal rajzolva. Látjuk, hogy a (7) szerinti rajzolás már csak akadozva megy.



7. ábra

S2.: $\delta \gg 1$.

Elég nagy δ esetén a görbe megint körbe megy át, a tapasztalatok szerint.

Tegyük fel, hogy ekkor:

$$r_1 \approx r_2 = r_0; \quad (\text{S2} - 1)$$

most (I. 6 – 1) és (S2 – 1) - gyel:

$$\left| \frac{r_1}{a} - \frac{r_2}{b} \right| = \delta \gg 1 \rightarrow \left| \frac{r_0}{a} - \frac{r_0}{b} \right| = \delta \rightarrow r_0 \cdot \left| \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right|,$$

innen:

$$\underline{r_0 = \frac{\delta}{\left| \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right|}}. \quad (\text{S2} - 2)$$

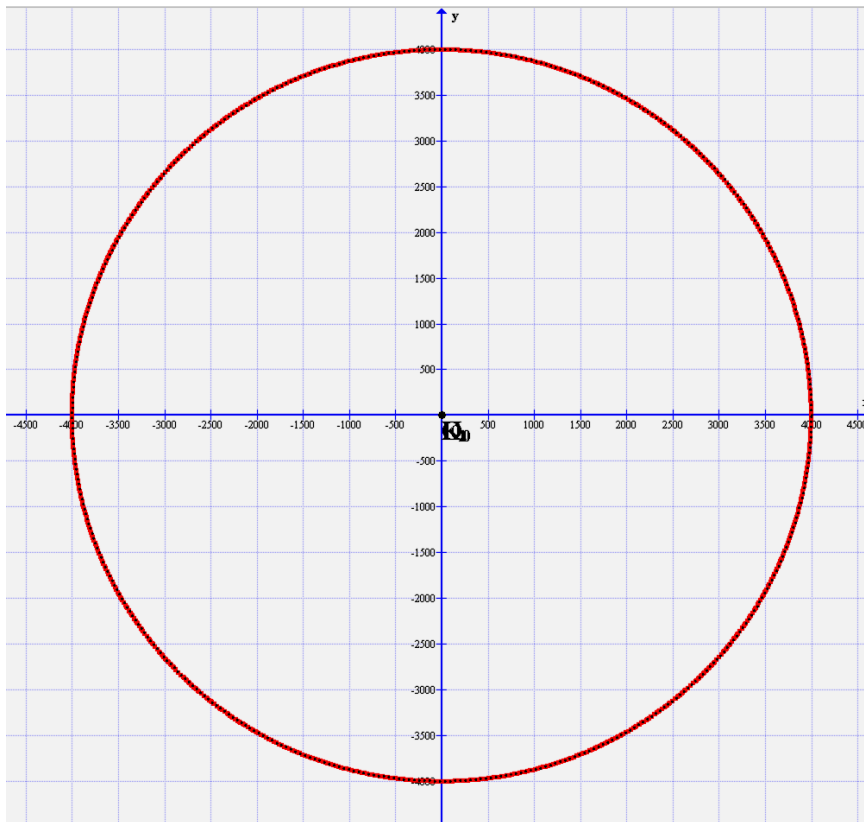
Adatok az ábrázoláshoz:

$$a = 2 \text{ (h.e.)}; b = 5 \text{ (h.e.)}; c = 3 \text{ (h.e.)}; \delta \gg 1 \rightarrow 1200. \quad (\text{A } 6)$$

Most (S2 – 2) és (A 6) szerint:

$$r_0 = \frac{\delta}{\left| \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right|} = \frac{1200}{\left| \frac{1}{2 \text{ (h.e.)}} - \frac{1}{5 \text{ (h.e.)}} \right|} = 4000 \text{ (h.e.)}. \quad (\text{e4})$$

A 8. ábrán megrajzoltuk a $\delta = 1200$ - nak megfelelő (7) és (A6) szerinti piros folytonos görbét, majd pedig az $R = 4000 \text{ (h.e.)}$ sugarú pontos fekete pontvonal kört. Az egyezés szinte tökéletes.



8. ábra

Ezek szerint feltevésünk – miszerint $\delta \gg 1$ esetén

$$r_1 \approx r_2 = r_0 = \frac{\delta}{\left| \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right|}$$

fennáll – helyesnek bizonyult. A 8. ábrán látható, hogy ekkor a centrum és a fókuszok, valamint a sugarak hossza közti különbség valóban elenyészik.

Folytassuk az ábrázolást, a δ - tartományt két részre bontva.

1. eset: $0 < \delta < \delta_1$.

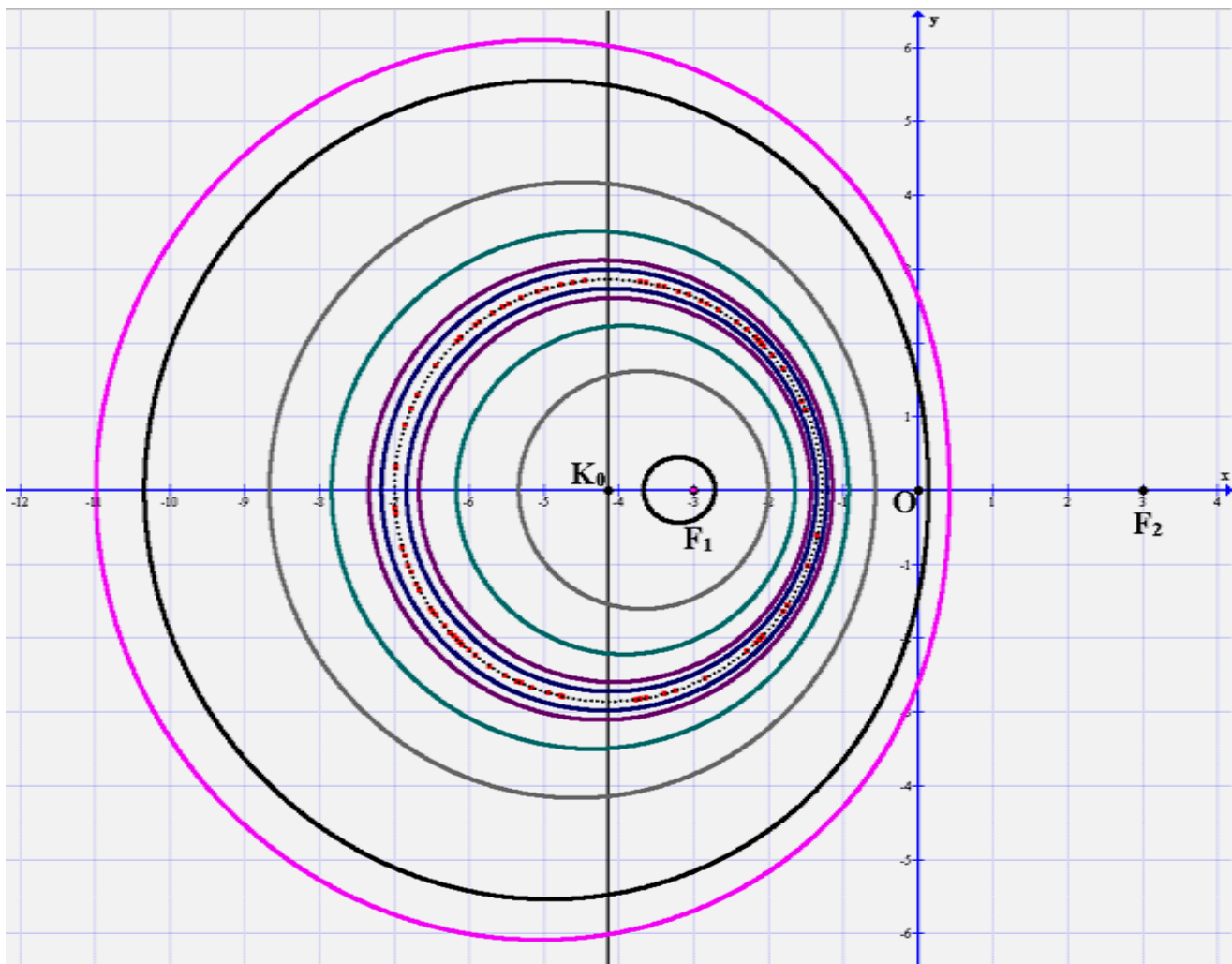
A δ_1 érték egy határt jelent, melyet a grafikonok ábrázolásakor figyelhetünk meg.

Adatok az ábrázoláshoz:

$$a = 2 \text{ (h.e.)}; b = 5 \text{ (h.e.)}; c = 3 \text{ (h.e.)};$$

$$\delta = \frac{1}{20}; \frac{1}{10}; \frac{1}{4}; \frac{1}{2}; 1; 1,2; 2; 3; 4; 7; 10; 25. \quad (\text{A5})$$

Az $A(7)$ függvénnyel és az (A5) állandókkal készült a 9. ábra.



9. ábra

Kettős görbék:

$$\text{lila: } \delta = \frac{1}{20}; \text{ bordó: } \delta = \frac{1}{10}; \text{ türkiz: } \delta = \frac{1}{4}; \text{ szürke: } \delta = \frac{1}{2}; \text{ fekete: } \delta = 1;$$

$$\text{pink: } \delta = 1,195 \approx 1,2.$$

Az 1. eset ábráinál azt találtuk, hogy δ értékének növelésével az induló $\delta = 0$ Apollóni - usz - féle körtől egyre inkább eltávolodnak a párosan fellépő görbék, mígnem elérik a δ_1 határnál azt az esetet, amikor az egyik görbe nullára zsugorodik. Ennek megfejtése, mint korábban is, az alábbi:

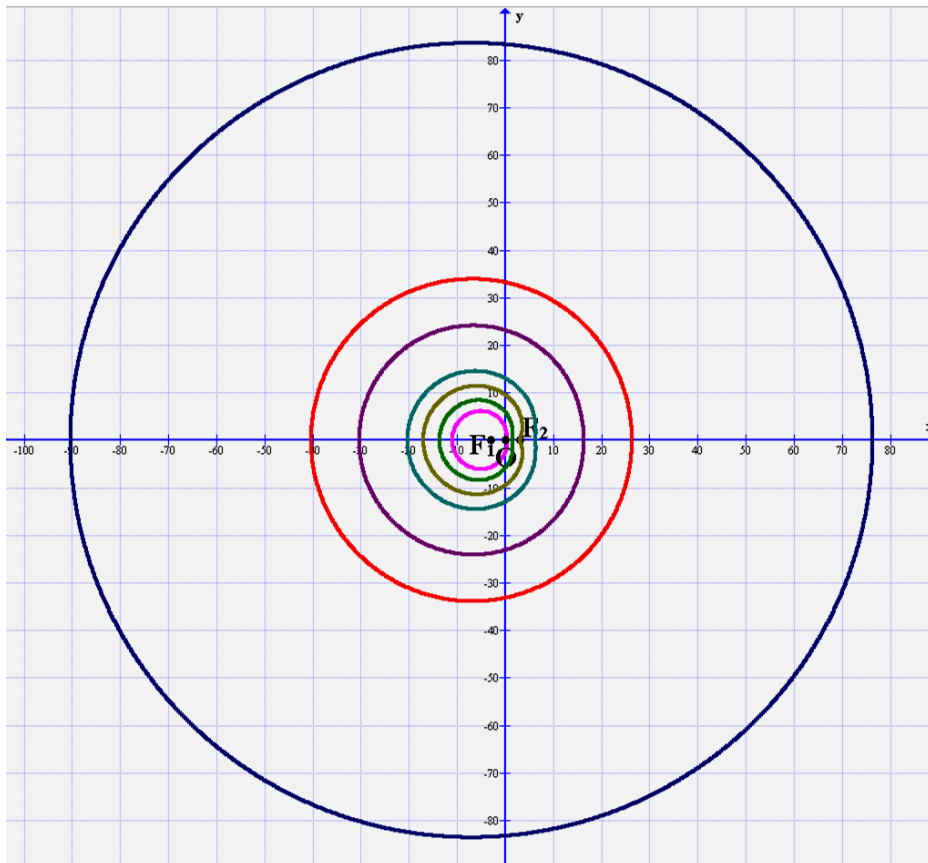
$$\left| \frac{r_1}{a} - \frac{r_2}{b} \right| = \delta \rightarrow r_1 = 0, r_2 = 2 \cdot c \rightarrow \left| -\frac{2 \cdot c}{b} \right| = \delta_1, \text{ innen:} \\ \underline{\delta_1 = \frac{2 \cdot c}{b}}. \quad (7/1)$$

Most (7/1) és (A5) - tel:

$$\delta_1 = \frac{2 \cdot c}{b} = \frac{2 \cdot 3 \text{ (h.e.)}}{5 \text{ (h.e.)}} = \frac{6}{5} = 1,2. \quad (e5)$$

2. eset: $\delta_1 < \delta < \infty$.

Az A(7) függvénnyel és az (A5) állandókkal készült a 10. ábra.



10. ábra

Egyszeres görbék:

pink: $\delta = \delta_1 = \frac{6}{5} = 1,2$; zöld: $\delta = 2$; arany: $\delta = 3$; türkiz: $\delta = 4$; bordó: $\delta = 7$; piros: $\delta = 10$; sötétkék: $\delta = 25$.

Az arany színű görbénél, melyre $\delta = 3$, láthatjuk a fókuszban való kicsúcsosodást, mint korábban is. Megfejtése ugyanaz:

$$\left| \frac{r_1}{a} - \frac{r_2}{b} \right| = \delta \rightarrow r_1 = 2 \cdot c, r_2 = 0 \rightarrow \frac{2 \cdot c}{a} = \delta_2, \text{ tehát:}$$

$$\underline{\delta_2 = \frac{2 \cdot c}{a}}. \quad (7/2)$$

Most (7/2) és (A5) - tel:

$$\delta_2 = \frac{2 \cdot c}{a} = \frac{2 \cdot 3 \text{ (h.e.)}}{2 \text{ (h.e.)}} = 3. \quad (\text{e6})$$

.....

Egy további speciális esettel folytatjuk.

S3.: $a = b$.

Ekkor (I. 6. – 1) - ből:

$$\left| \frac{r_1}{a} - \frac{r_2}{a} \right| = \delta \rightarrow |r_1 - r_2| = \delta \cdot a = 2 \cdot a^{**}, \quad (7/3)$$

ami a hiperbola definíciós egyenlete.

.....

Megjegyzések:

M1. Meglepetéssel konstatáltuk, hogy (I. 1 / 1) és (I. 2 / 1) milyen egyszerű eredményre vezetnek, valamint „fejünket csapkodtuk”, amikor kiderült, hogy (I. 3 / 1) és (I. 4 / 1) már csak a korábbiak folyománya.

M2. (I. 5 – 1) - gyel még sehol nem találkoztunk, emlékeink szerint.

Ez már „hozta a formáját”.

(I. 6 – 1) azzal okozott meglepetést, hogy alig van köze a hiperbolához; csak az **S3.** speciális esetben.

(I. 7 – 1) és (I. 8 – 1) - nél már nem is csapkodtuk a fejünket.

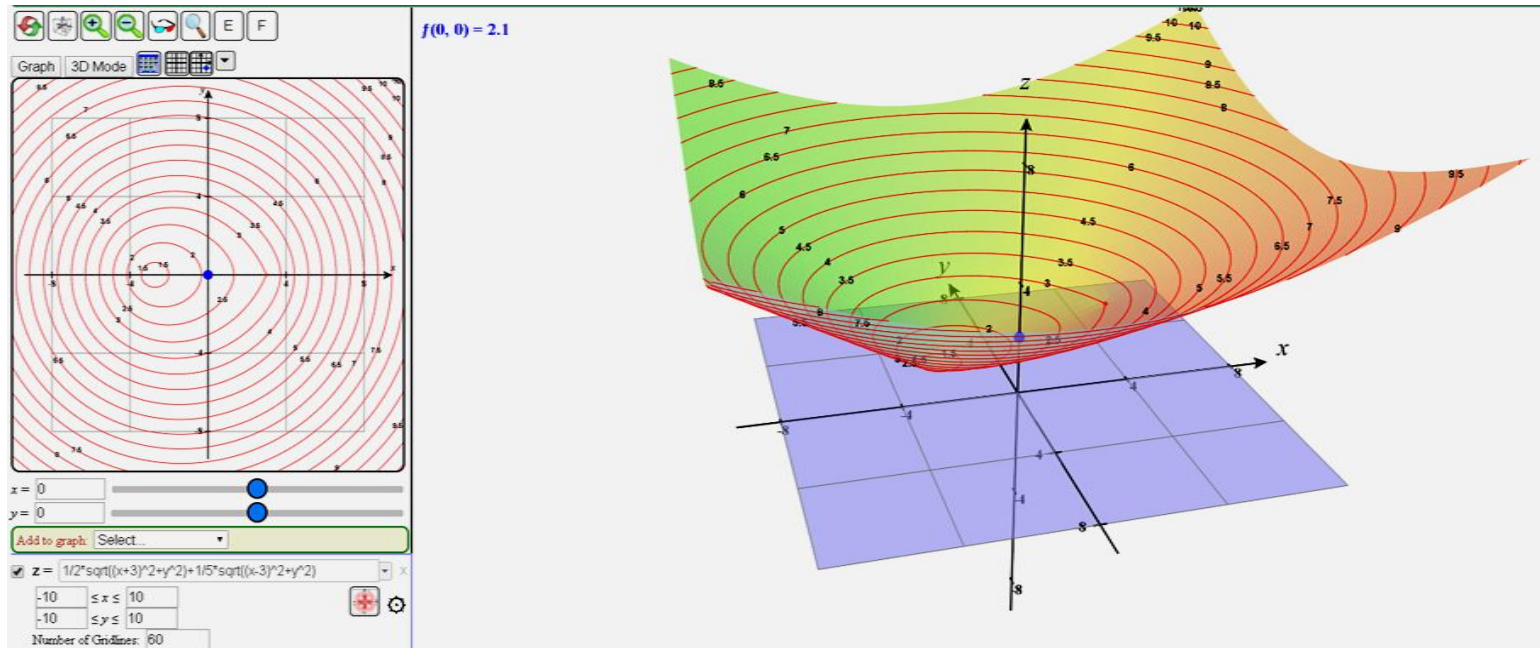
M3. Több mindenbe belekezdünk, sok mindent csak jeleztünk. Így aztán megeshet, hogy ez az írás az első része egy több részes iromány - folyamnak. Nem vitás, hogy van mit „felfedezni” a szóban forgó témakörben, mely igencsak kiterjedt. Az azonban tényleg meglepő, hogy nem rémlik, hogy olvastunk volna akár az egyszerűbb, nem a „négyek” közé tartozó mértani helyekről, valaha is, valahol.

M4. Egy másfajta grafikus is megjelenítést is megmutathatunk.

(6) és (A4) szerint képezzük a

$$\frac{1}{2} \cdot \sqrt{(x+3)^2 + y^2} + \frac{1}{5} \cdot \sqrt{(x-3)^2 + y^2} = z ; \quad (6^*)$$

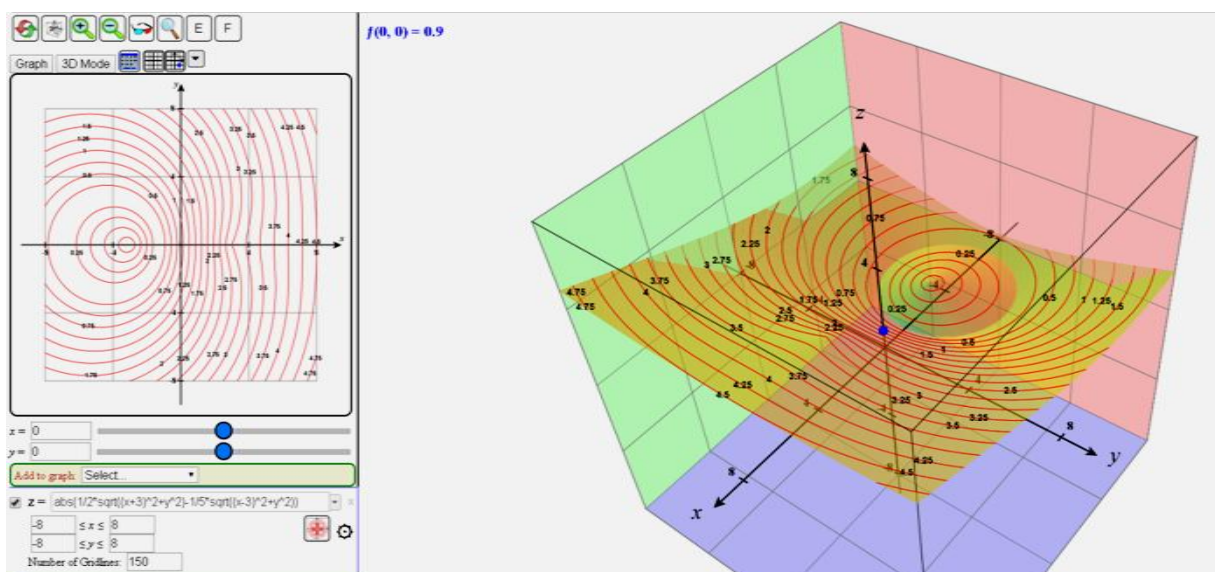
függvényt, melyet a 11. ábrán mutatunk.



11. ábra

Majd (7) és (A6) - tal képezzük az alábbi függvényt, melyet a 12. ábrán mutatunk.

$$\left| \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(x+3)^2 + y^2} - \frac{1}{5} \cdot \sqrt{(x-3)^2 + y^2} \right| = z . \quad (7^*)$$



12. ábra

A $z = f(x, y)$ függvények szintvonalai a keresett görbék, vagyis a $z = \delta$ síkokkal való síkmetszetek. Ezeket érdemes összevetni a korábbiakkal.

M5. Megemlítjük, hogy M4. szerinti „találmányunkat” már korábban is alkalmaztuk, az itteni (c) szerinti esetre egy dolgozatunkban, melynek címe:

A Cassini - görbék felületének ábrázolása.

Az érdeklődő Olvasónak javasoljuk e módszer alkalmazását az (a) és (b) szerinti esetekre, pl. [2] - vel!

Források:

[1] – <https://www.padowan.dk/>

[2] – <https://www.monroecc.edu/faculty/paulseeburger/calcnfs/CalcPlot3D/>

Összeállította: ***Galgóczi Gyula***
ny. mérnöktanár

Sződliget, 2020. 05. 24.